

VECTEURS ET TRANSLATION

9

Objectifs d'apprentissage

- ✍ Reconnaître un vecteur et le construire.
- ✍ Construire la somme de deux vecteurs.
- ✍ Utiliser les vecteurs pour résoudre un problème.
- ✍ Construire l'image d'une figure par une translation.
- ✍ Utiliser la translation dans la résolution des problèmes géométriques.

Gestion du temps

🕒 10 heures

Prérequis

- ⊗ Reconnaître les caractéristiques d'un vecteur.
- ⊗ L'égalité de deux vecteurs et le parallélogramme
- ⊗ Utiliser la relation de Chasles.
- ⊗ Reconnaître la translation qui transforme un point en un autre point.

Outils didactiques

- ♣ Tableau.
- ♣ Livre scolaire.
- ♣ Compas, Equerre, Rapporteur.

www.izaarpcm.com

◆ Pr : Abdelilah BOUTAYEB

◆ Niveau : 3^{ème} APIC

◆ Matière : Mathématiques

◆ Etablissement : Collège Nahda

I- Les vecteurs :

1) Vocabulaire :

*** Définition :** Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par trois composantes

- ♦ La direction : la direction de la droite (AB)
- ♦ Le sens : de A vers B
- ♦ La longueur : la distance AB.



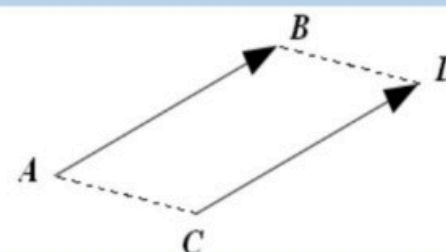
*** Remarque :** Tout point A définit un **vecteur nul** noté $\vec{0}$, on écrit : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2) Egalité de deux vecteurs :

* Propriété :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : $(AB) // (CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même longueur : $AB = CD$

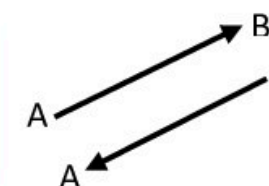


*** Remarque :** Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ tel que les points ne sont pas alignés, alors le quadrilatère **ABDC** est un **parallélogramme**.

3) Vecteur opposé :

*** Définition :** Le vecteur opposé d'un vecteur

$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, et on écrit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



*** Remarque :** Deux vecteurs opposés ont la même direction et la même longueur mais ils ont des sens opposés.

Exercice 1: Soit ABC un triangle.

- 1) Construis M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$
- 2) Construis N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB}$

Exercice 2: Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

J le symétrique de A par rapport à I .

- 1) Construire une figure convenable.
- 2) Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BJ}$

Exercice 3: $ABCD$ un parallélogramme et E le symétrique de A par rapport à B . Montrer que $BECD$ est un parallélogramme.

Exercice 4: $ABCD$ un parallélogramme.

- 1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
- 2) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

Exercice 5: $ABCD$ un parallélogramme.

- 1) Construis M tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- 2) Construis N tel que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Activités

Activité 2 : Activité : 2 – page : 146

Activité 3 : Activité : 3 – page : 146

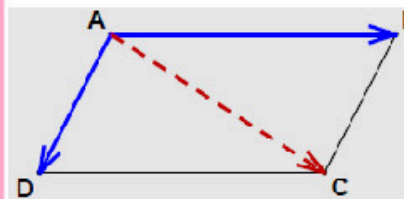
www.izaarpcm.com

Contenu de la leçon

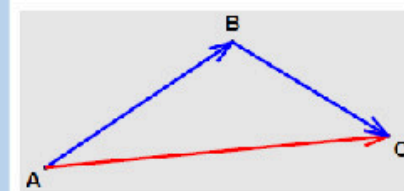
4) Somme de deux vecteurs :

*** Définition :** La somme de deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ est le vecteur $\vec{AC}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

On écrit : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$



*** Propriété :** Pour tous les points A, B et C on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ est appelée **relation de Chasles**.



*** Exemples :** Simplifier ce qui suit :

$$* \vec{MN} + \vec{NO} = \vec{MO}$$

$$** \vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GE} = \vec{EG} + \vec{GE} = \vec{EE} = \vec{0}$$

$$*** \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

5) Produit d'un vecteur par un nombre réel :

*** Définition :** Soit k un nombre réel et $\vec{AB}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\vec{AC}$ est le produit du vecteur $\vec{AB}$ par le nombre réel k si $C \in (AB)$ tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$.

♦ Si $k > 0$ alors $AC = k \times AB$ et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont le **même sens**.

♦ Si $k < 0$ alors $AC = k \times AB$ et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont de **sens contraires**.

*** Exemples :** 1) Soit $\vec{AB}$ un vecteur non nul. Construis le point M tel que : $\vec{AM} = 4\vec{AB}$



Evaluation

Exercice 6 : Simplifier les écritures des vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{AD} + \vec{DE} \quad \blacksquare \quad \vec{MN} + \vec{OM} \quad \blacksquare \quad \vec{CB} + \vec{BC}$$

$$\vec{AD} - \vec{CD} \quad \blacksquare \quad \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DA} \quad \blacksquare$$

$$\vec{AD} + \vec{BC} + \vec{DB} \quad \blacksquare \quad \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{AB}$$

$$\vec{AB} - \vec{BD} + \vec{CA} - \vec{CB}$$

$$\vec{FE} - \vec{GE} - \vec{GF} + \vec{GH} + \vec{GF}$$

$$\vec{ED} + \vec{BA} + \vec{DC} - \vec{EA} - \vec{BC}$$

$$2(\vec{MN} - 5\vec{EF}) - 5(\vec{MN} - 2\vec{EF})$$

Exercice 7 : Soit EFG un triangle.

Construis les points M, N et K tel que :

$$\vec{FM} = \vec{EF} \quad \blacksquare \quad \vec{GN} = -2\vec{GF} \quad \blacksquare \quad \vec{EK} = -\frac{3}{2}\vec{EG}$$

Exercice 8 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

1) Construis O' tel que : $\vec{OO'} = \vec{AB}$

2) Construis E et F tel que : $\vec{AF} = -\vec{AD}$
et $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AD}$

3) Montrer que : $\vec{EF} = -\frac{1}{3}\vec{AC}$

4) Dédire que $(AC) \parallel (EF)$

Activité 4 : Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et $M \notin (AB)$.

1) Construis le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABM'M$?

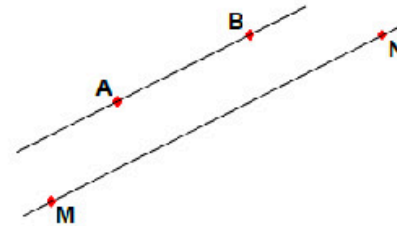
2) Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul. Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = -4\overrightarrow{AB}$



*** Propriété :** Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors A, B et C sont des **points alignés**.

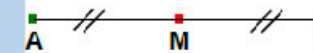


*** Propriété :** Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$ alors $(AB) \parallel (MN)$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont **colinéaires**.



6) Vecteur et milieu d'un segment :

*** Propriété :** A, M et B sont des points. M est le milieu de $[AB]$ signifie que :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{cases}$$

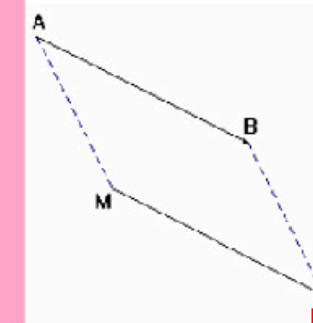


II- La translation :

1) Image d'un point par une translation :

*** Définition :** A et B deux points distincts. M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \\ ABM'M \text{ est un parallélogramme} \end{cases}$$



Exercice 9 : Soit ABC un triangle tel que :

$BC = 6cm$.

1) Construis M et N tel que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AB}$.

2) Montrer que : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

3) Dédire que : A, M et N sont des points alignés.

Exercice 10 : Soit ABC un triangle tel que :

$AC = 1cm$ et $AB = 6cm$.

1) Construis E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que : $(CE) \parallel (FB)$.

Exercice 11 : Soit $ABCD$ un parallélogramme

1) Construis E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

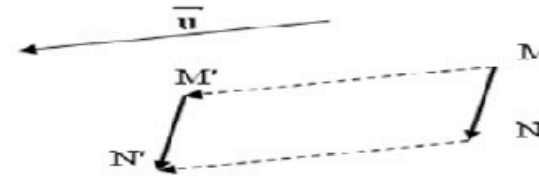
2) Montrer que C, A et F sont des points alignés.

*** Remarque :** Si $M \in (AB)$ alors M' l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ **appartient** à la droite (AB) .

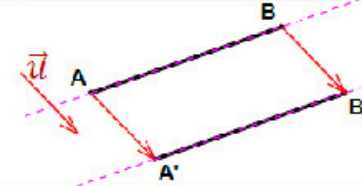


*** Propriété :** Soient M et N deux points du plan.
Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une translation, alors : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

*** Exemple :** On considère la translation de vecteur $\vec{u}$

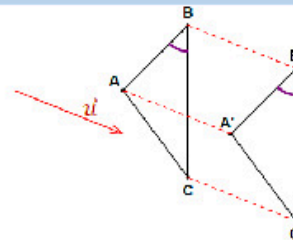


2) Image des figures usuelles par une translation :



*** Propriété :** L'image d'une droite (AB) par une translation est une droite $(A'B')$ parallèle à (AB) .

*** Propriété :** L'image d'un segment $[AB]$ par une translation est un segment $[A'B']$ de même longueur.



*** Propriété :** L'image d'un angle $\widehat{ABC}$ par une translation est un angle $\widehat{A'B'C'}$ de même mesure.

Exercice 12 : Soit $ABCD$ un

parallélogramme.

- 1) Déterminer l'image du point D par la translation qui transforme A en B .
- 2) Déterminer l'image du point A par la translation qui transforme D en A .
- 3) Déterminer l'image du point C par la translation qui transforme D en A .
- 4) Construis le point E l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 5) Montrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$

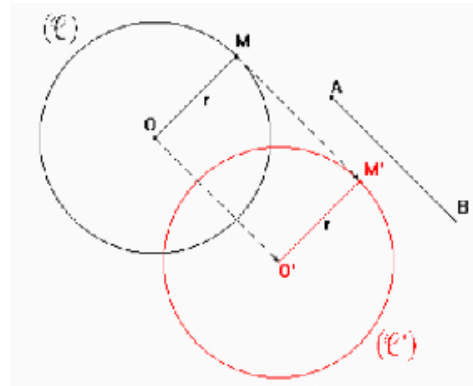
Exercice 13 : Soit $ABCD$ un losange de centre I et K l'image du point I par la translation T du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- 1) Construis une figure convenable.
- 2) Montrer que l'image du point D par la translation T est le point C .
- 3) Déterminer l'image de l'angle $\widehat{AID}$ par la translation T .
- 4) Dédire que BKC est un triangle rectangle en K .

Activités

Contenu de la leçon

Evaluation



*** Propriété :** L'image d'un cercle (ℓ) par une translation est un cercle (ℓ') de même rayon.

Exercice 4 : Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

- 1) Construis E l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$.
- 2) Construis F l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{OD}$.
- 3) Montrer que F , D et E sont des points alignés.

Exercice 5 : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AC = 4\text{cm}$ et E le milieu de $[BC]$.

Soit T la translation qui transforme A en E .

- 1) Construis F l'image de B et G l'image de C par la translation T .
- 2) Calculer EG . Justifie.
- 3) Montrer que : $(FG) \parallel (BC)$.
- 4) Déterminer la nature du triangle EFG .

www.lzaarpcm.com

www.izaarpcm.com