

Introduction

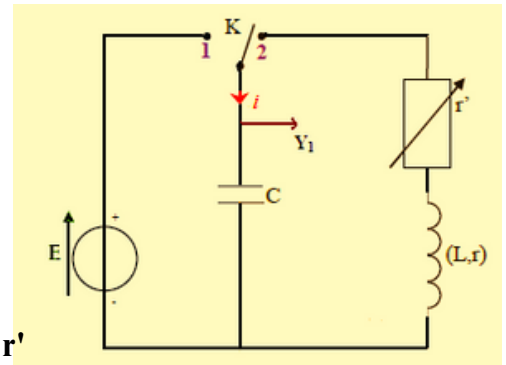
Dipôle LC : association série d'un condensateur chargé de capacité C et de charge initiale q_0 et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r négligeable.

1 - Décharge d'un condensateur dans une bobine.

1 - Etude expérimentale :

On réalise le montage ci-contre

- Pour charger le condensateur par le générateur, placer L'interrupteur (K) en position 1,
- Lorsque la charge aux bornes du condensateur atteint la tension $U_c = E$, Basculer L'interrupteur (K) en position 2.
- Le condensateur se décharge dans un dipôle RL où $R = r + r'$
- La voie Y1 est reliée à l'oscilloscope à mémoire, branché aux bornes du condensateur pour suivre l'évolution de la tension

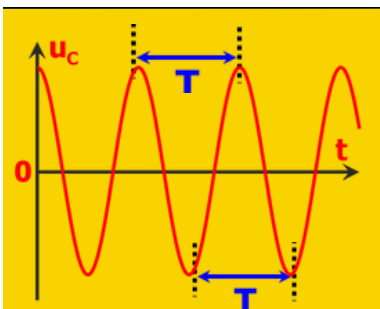


Observations et interprétations

- La tension U_c subit des oscillations libres amorties dont la valeur maximale décroît et intervient à intervalles de temps égaux. On dit que le régime des oscillations est **pseudo-périodique**.

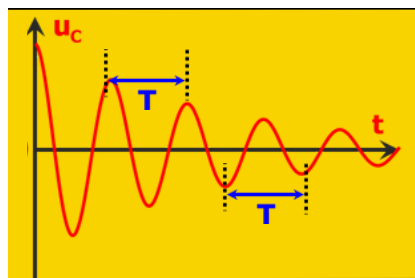
2 - Régimes d'oscillations

a - Régime périodique:



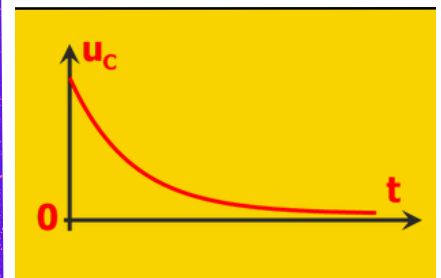
- La résistance est nulle, les oscillations sont périodiques. Le circuit LC est alors le siège d'oscillations propres non amorties.
- Le régime est alors périodique la période T_0 des oscillations est appelée **période propre**

b - Régime pseudo-périodique



- R est faible, l'amplitude des oscillations n'est pas constante mais décroît : les oscillations s'amortissent. Le régime est dit **pseudo-périodique**

c - Régime apériodique



- R est élevée, il n'y a plus d'oscillations. Le régime est dit **apériodique**

**PROF
ELZAAR**

3 - Equation différentielle la tension aux bornes du condensateur d'un circuit (R,L,C) série

On réalise le montage ci-contre

En appliquant la loi de la maille $U_R + U_L + U_C = 0$

$$Ri + r.i + L.\frac{di}{dt} + u_c = 0 \Rightarrow L.\frac{di}{dt} + (R+r)i + u_c = 0$$

L'expression de l'intensité :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C.\frac{d(u_c)}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

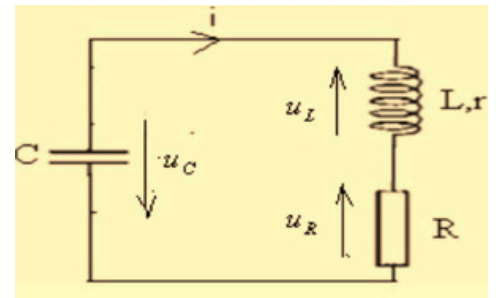
On obtient une équation différentielle du second ordre

$$L.C.\frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R+r).C.\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

En divisant le tout par LC, et on pose $R_t = R + r$, on obtient

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R_t}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{L.C} u_c = 0$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC en série.



II - Etude de l'oscillateur non amorti (L,C)

1 - L'équation différentielle

On considère le circuit LC série suivant, où le condensateur est initialement chargé. ($R=0$)

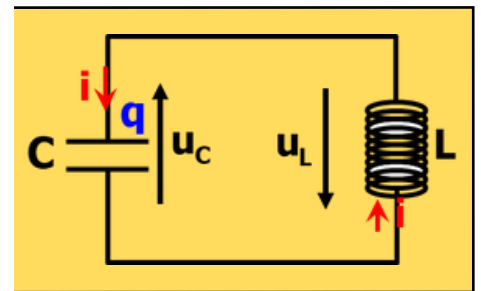
D'après la loi d'additivité des tensions : $u_L + u_c = 0$

Avec $U_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}$

Donc $U_L = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2}$

Alors l'équation différentielle d'un circuit (L,C) est.

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = 0 \quad \text{En divisant le tout par LC} \quad \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$



2 - Solution de l'équation différentielle

mathématiquement sa solution s'écrit de la forme suivante : $u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

Avec U_m , T_0 et φ sont trois constantes à déterminer

U_m : Amplitudes de la tension U_c

φ : la phase à l'instant $t=0$, elle s'exprime en radian (rad)

T_0 : la période propre des oscillations, elle s'exprime en seconde (s)

$(2\pi/t_0) t + \varphi$: La phase à l'instant (t)

**PROF
ELZAAR**

3 - Expression de T_0

Montrons que la solution proposée est bien solution de l'équation différentielle

RAPPEL MATHÉMATIQUE dérivé d'une fonction composée

$$(\cos U_c)' = -\sin(U_c) \times U_c' \quad \text{et} \quad (\sin U_c)' = \cos(U_c) \times U_c'$$

➡ On a $U_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow \frac{dU_C(t)}{dt} = -U_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow \frac{d^2U_C(t)}{dt^2} = -U_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

➤ L'équation différentielle s'écrit $\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_C = -U_m \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) + U_m \cdot \frac{1}{LC} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$

Alors $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Conclusion

➤ La fonction $U_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}U_C = 0$$

$\begin{cases} T_0 \text{ période propre des oscillations ne dépend que de } L \text{ et } C. \\ \text{Son unité dans le système international est le seconde (s).} \end{cases}$

4 - Vérification de l'unité de T_0 par analyse dimensionnelle

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ donc: $[T_0] = ([L] \cdot [C])^{1/2}$

d'après la relation: $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$ on a: $[I] = [C] \frac{[U]}{[t]}$ d'où: $[C] = \frac{[I] \cdot [t]}{[U]}$

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ Et d'après la relation: on a: $[U] = [L] \frac{[I]}{[t]}$ d'où: $[L] = \frac{[U] \cdot [t]}{[I]}$

Donc: $[T_0] = ([L] \cdot [C])^{1/2} = \left[\frac{[U] \cdot [t]}{[I]} \times \frac{[I] \cdot [t]}{[U]} \right]^{1/2} = [t^2]^{1/2} = [t]$

➡ La période propre dont l'expression est: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ a bien la dimension d'un temps et s'exprime en seconde.

5 - Détermination des constantes U_m et φ

Utilisation des conditions initiales

à l'instant $t = 0$, le condensateur est chargé donc $U_C(0) = E$

**PROF
ELZAAR**

Alors $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow i(0) = C \left(\frac{dU_C}{dt} \right)_{t=0} = 0$

➡ L'intensité est nulle: $i(0) = 0$ la bobine n'est traversée par aucun courant électrique.

On étudie donc la « décharge » du condensateur:

On a $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = -C \cdot U_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

à l'instant $t = 0$ $U_C(0) = U_m \cos(\varphi) = E$ et $i(0) = -C \cdot U_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi) = 0$

$\sin(\varphi) = 0$ et $\cos(\varphi) > 1$ d'où $\varphi = 0$ et $U_m = E$

Par conséquent Expression de la tension aux bornes du condensateur s'écrit:

$U_C(t) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ ✓

➡ La tension aux bornes du condensateur est une tension alternative sinusoïdale d'amplitude E et de période: T_0 c'est un régime périodique

6 - Évolution de la charge q et de l'intensité i

a - L'expression de la charge q

➤ On a $q(t) = C U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ Avec $q_m = C U_m \Rightarrow q(t) = q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ ✓

b - L'expression de l'intensité i du courant

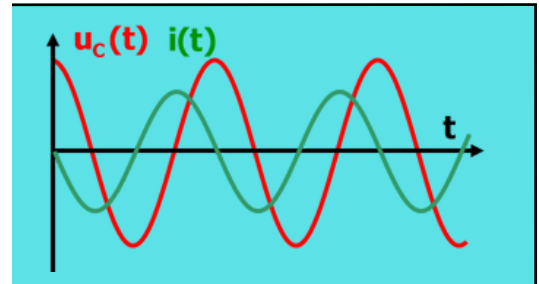
On a $i(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = -q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ Avec $I_m = q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow i(t) = -I_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ ✓

c - Représentation de U_c et i en fonction de t .

On considère que $\varphi = 0$, donc

$$u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

$$i(t) = -I_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$



III - Etude des échanges d'énergies dans un circuit RLC

1 - L'énergie d'un circuit (L,C) série

➡ Dans un circuit LC, l'énergie totale du circuit s'écrit

$$E_T = E_C + E_L$$

E_C : l'énergie électrique stockée dans le condensateur

E_L : l'énergie emmagasinée dans la bobine

E_T : l'énergie totale

➤ Avec $E_C = \frac{1}{2} C U_C^2(t)$ et $E_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$

Donc $E_T = \frac{1}{2} C U_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}$ Avec $i(t) = C \frac{dU_C}{dt}$

Alors $\frac{dE_T}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C^2 \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \left(U_C + LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} \right) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \left(LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C \right)$

PROF
ELZAAR

et puisque $LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = 0$ Alors $\frac{dE_T}{dt} = 0$

➡ Dans un circuit LC, l'énergie totale du circuit est constante au cours du temps

$$E_T = E_C + E_L = \text{constante}$$

➤ L'énergie totale se conserve car l'énergie n'est pas dissipée (pas d'effet joule)

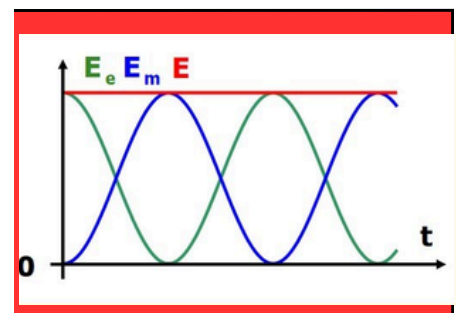
Lorsque $U_C = U_m$, nous avons $i=0$

$E_T = \frac{1}{2} C U_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} C U_m^2$

Lorsque $U_C=0$, nous avons $i = I_m$

$E_T = \frac{1}{2} C U_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} L I_m^2$

d'où $E_T = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 = \text{cte}$



2 - L'énergie d'un circuit (R,L,C) série

Dans un circuit RLC, l'énergie totale est

$$E_T = E_C + E_L$$

$$E_T = \frac{1}{2} C U_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad \text{Avec} \quad i(t) = C \frac{dU_C}{dt}$$

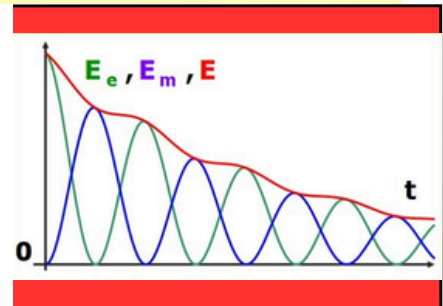
$$\text{Alors} \quad \frac{dE_T}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot i(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} = C \cdot U_C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C^2 \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \left(U_C + LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} \right) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \cdot \left(LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C \right)$$

et puisque $LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0 \Rightarrow LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = -RC \frac{dU_C}{dt}$

alors $\frac{dE_T}{dt} = \left(C \cdot \frac{dU_C}{dt} \right) \cdot \left(-RC \frac{dU_C}{dt} \right) = i(t) \cdot (-R \cdot i(t)) = -R \cdot i(t)^2 \neq 0$

⚡ Dans un circuit RLC, au cours de l'échange énergétique entre le condensateur et la bobine, il y a perte énergétique par effet Joule dans la résistance de puissance $R \times i^2$



IV-Entretien des oscillations

- Pour le circuit (R,L,C) série, l'amplitude des oscillations décroît à cause d'une dissipation d'énergie par effet Joule dans le conducteur ohmique.
- Il est possible d'entretenir les oscillations pour obtenir une amplitude constante des oscillations
- Donc Il faut ajouter un dispositif électronique au le circuit (R,L,C) pour qu'il devienne équivalent à un circuit LC .Ce dispositif d'entretien des oscillations possède une alimentation propre appelé résistance négative possible de fournir au circuit à chaque instant une énergie équivalente à l'énergie dissipée par effet joule. L'énergie totale du circuit reste alors constante

➡ Pour cela on réalise le montage suivant dans lequel le générateur G délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant qu'il débite $U_g = R_0 \cdot i$

Le générateur G est introduit dans le circuit (R,L,C).

D'après la loi d'additivité des tensions

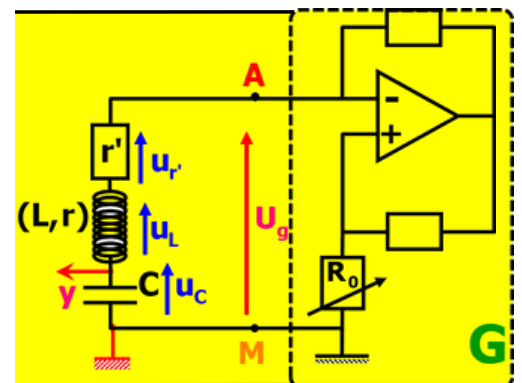
$$u_g = u_{r'} + u_L + u_C$$

$$\Rightarrow R_0 i = r' i + r i + L \frac{di}{dt} + u_C$$

Notons $i = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$

D'où $R_0 i = (r' + r) \cdot i + L \ddot{q} + u_C$

en posant $R = r + r'$ et $U_C = q / C$ soit $R_0 i = R \cdot i + L \ddot{q} + \frac{q}{C}$ ✓



PROF
ELZAAR

➡ On voit que si $R = R_0$ l'équation devient alors :

$$0 = L\ddot{q} + \frac{q}{C} \Rightarrow \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0 \quad \checkmark$$

- ≠ C'est l'équation différentielle d'un circuit (L,C) non amortie de période
- ≠ Les oscillations d'un circuit (R,L,C) série peuvent être entretenues par le générateur G qui compense les pertes d'énergie par effet Joule
- ≠ Le générateur G se comporte comme une résistance négative $-R_0$
- ≠ Ce montage, constitue un générateur d'oscillations électriques dont la période T_0 qui ne dépend que de L et C

**PROF
ELZAAR**



prof elzaar

حكمة اليوم

- الحلم هو مجرد حلم أما الهدف فهو حلم له خطة وموعد نهائي لتحقيقه.