

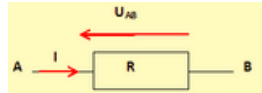
I - Introduction (Définitions)

Dipôle RC : association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C

1 - Conducteur ohmique (Rappel)



Un conducteur ohmique est un dipôle vérifiant la loi d'ohm. la tension a ses bornes est proportionnelle a l'intensité du courant qui le traverse

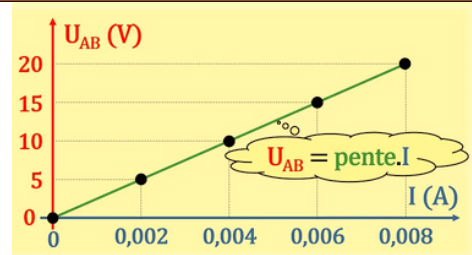


Loi d'ohm

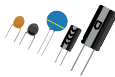
$$U_{AB} = R I$$

U_{AB} : tension (V)
 I : intensité (A)
 R : résistance (Ω)

caractéristique d'un conducteur ohmique



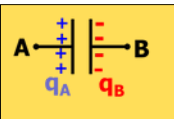
2 - Le condensateur



a - Définition :

➤ Un condensateur est un dipôle constitué de deux armatures métalliques parallèles, placées à des potentiels différents et séparées par un isolant ou un diélectrique.

➤ Nous admettons qu'à chaque instant, les armatures A et B portent des charges électriques opposées, de mêmes valeurs absolues $q_A = -q_B$

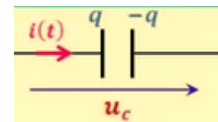


Symbole

b - Charge électrique et intensité

➤ L'intensité i du courant est le débit de charge électrique, circulant dans le circuit par unité de temps

$$(A) \quad i(t) = \frac{dq_A}{dt} \quad (C) \quad (S)$$



✓ La relation entre la tension U_c et la charge q

$$q = C \cdot U \quad \text{Avec : } \begin{array}{l} C : \text{capacité du condensateur (F)} \\ q : \text{charge du condensateur (C)} \\ U : \text{tension (V)} \end{array}$$

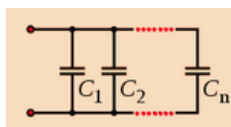
Donc

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

c - Association des condensateurs

➤ Condensateurs en parallèle

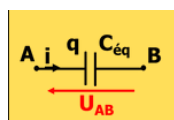
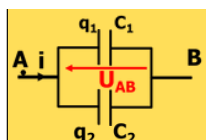
➤ Condensateurs en parallèle : plusieurs condensateurs en parallèle se comportent comme un unique condensateur de capacité équivalente à C_{eq} telle que



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

➤ Pour deux condensateurs C_1 et C_2 en parallèle :



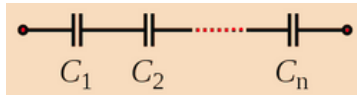
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

**PROF
ELZAAR**

➤ L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente supérieure à la plus grande d'entre elles.

➤ Condensateurs en série

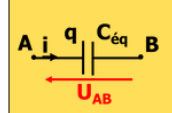
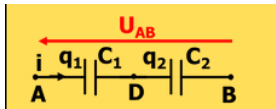
Plusieurs condensateurs en série se comportent comme un unique condensateur de capacité équivalente à C_{eq} telle que



$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

**PROF
ELZAAR**

Pour deux condensateurs C_1 et C_2 en parallèle :



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

➤ L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente inférieure à la plus petite d'entre elles.

3- Les générateurs

a - Le générateur idéal de tension

Une source idéale de tension est telle que $U = E$, quelle que soit l'intensité du courant débité. La valeur E s'appelle force électromotrice (fem)

En régime continu, E est une constante ; la caractéristique tension-courant est alors une droite parallèle à l'axe des abscisses.

b - Le générateur idéal de courant

➤ Une source idéale de courant est telle que $i = I = \text{constante}$ quelle que soit la tension qui existe à ses bornes.

II - Charge d'un condensateur :

La charge du condensateur consiste à brancher aux bornes de ce dipôle RC un générateur de tension continue dont la valeur est égale à E .

1 - Équation différentielle vérifiée par la tension U_c .

On considère le montage électrique suivant

➤ A l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K . La tension aux bornes du dipôle RC passe de 0 à E

➤ A l'instant $t_0 = 0$, on ferme l'interrupteur K . La tension aux bornes du dipôle RC passe de 0 à E

➤ D'après l'additivité des tensions on peut écrire $U = U_c + U_r = E$

et d'après la loi d'Ohm on a $U_r = R \cdot i$ Alors $E = R \cdot i + U_c$



$$E = R \frac{dq}{dt} + u_c \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$



$$E = R \frac{dCu_c}{dt} + u_c \quad \text{avec } q = C U_c$$



Finalement

$$E = RC \frac{du_c}{dt} + u_c$$

Équation différentielle vérifiée
par la tension U_c

2 - Solution de l'équation différentielle

- On considère $U_c(t)$ comme variable et la solution de l'équation différentielle $U_c(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$
- Pour déterminer les constantes A, B et τ , on remplace la solution et sa dérivée première dans l'équation différentielle

a - Déterminer b et τ

$$U_c(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B \text{ et } \frac{dU_c(t)}{dt} = A.\left(-\frac{1}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_c + R.C.\frac{dU_c}{dt} = E : \text{équation différentielle vérifiée par } U_c$$

$$A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B + R.C.\left(-\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \text{ et } A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B - R.C.A.\frac{1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

$$\text{donc } A.e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - R.C.\frac{1}{\tau}\right) + B = E$$

➡ Par Egalité de deux fonctions polynomiales, l'équation est exacte si :

$$\Rightarrow B = E \text{ et } (1 - R.C.\frac{1}{\tau}) = 0 \text{ d'où } \tau = R.C$$

b - Déterminer la constante A par les conditions initiales :

- à $t=0$ la tension $U_c(0)=0$, on remplace dans l'équation horaire et on obtient $U_c(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$
- $$\Rightarrow 0 = A.e^0 + B = A + B, A + B = 0 \text{ et } A = -B = -E$$

Conclusion

$$\begin{cases} A = -E, B = E \text{ et } \tau = R.C \\ U_c(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B = -E.e^{-\frac{t}{\tau}} + E = E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases}$$

➤ Finalement la solution s'écrit : $u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$

➡ τ est appelée constante de temps du dipôle RC

**PROF
ELZAAR**

3 - Dimension de la constante de temps τ

➡ D'après l'équation des dimensions, on a $[\tau] = [R].[C]$

➡ d'autre part $[R] = \frac{[U]}{[I]}$ et $[C] = \frac{[I]}{[U]}.[t]$ Donc $[\tau] = [t]$

➡ $\tau = R.C$ a la dimension d'une durée, s'exprime en seconde

4 - La représentation de $U_c = f(t)$:

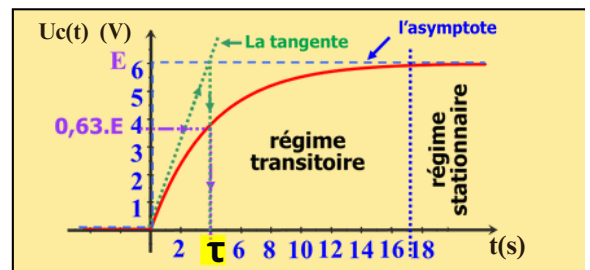
Mathématiquement la courbe qui représente $U_c = f(t)$ est la suivante tel que à $t = 0$ on a $U_c(0) = 0$ et quand $t \rightarrow \infty$ on a $U_c = E$,

➡ pratiquement on considère $t > 5\tau$ on a $U_c(\infty) = E$

La courbe présente deux régime :

Un régime transitoire : la tension $u_c(t)$ varie au cours du temps .

Un régime stationnaire ou régime permanent où $u_c(t)$ reste constante et égale à E



5 - Dètermantion de la constante du temps τ

Première méthode : On utilise la solution de l'équation différentielle :

$$u_c(t=\tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E \text{ donc } \tau \text{ est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée } 0,63E$$

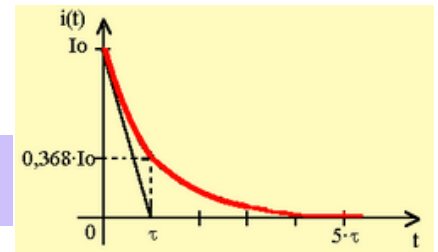
Deuxième méthode La tangente à la courbe à $t=0$, coupe l'asymptote $U=E$ au point d'abscisse τ

6 - Expression de l'intensité du courant de charge $i(t)$

On sait que l'intensité du courant de charge :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt} = C \cdot E \cdot \left(0 + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}\right) = \frac{CE}{RC} \cdot e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

$q = C \cdot U_c$



Tel que E/R représente l'intensité de courant à l'instant $t = 0$ noté I_0 avec $I_0 = \frac{E}{R}$.

III - Décharge d'un condensateur :

Après la charge du condensateur, on bascule l'interrupteur à la position ② que l'on considère comme origine des dates $t=0$, le condensateur se décharge dans la résistance.

1 - Équation différentielle vérifiée par la tension U_c

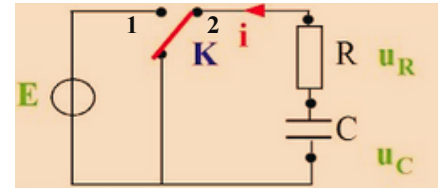
En appliquant la loi d'additivité des tensions $U_r + U_c = 0$

d'après la loi d'ohm $U_r = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt}$

On aboutit à l'équation différentielle vérifiée par une variable donnée

Variable U_c : $U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} = 0$

Variable q : $\frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} = 0$ Ou $q + R \cdot C \cdot \frac{dq}{dt} = 0$



2 - Solution de l'équation différentielle

On considère $U_c(t)$ comme variable et la solution de l'équation différentielle

Pour déterminer les constantes A , B et τ , on remplace la solution et sa dérivée première dans l'équation différentielle $U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} = 0$

On a $U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B \Rightarrow \frac{dU_c(t)}{dt} = A \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Alors $A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B + R \cdot C \cdot \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0 \Rightarrow A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B - R \cdot C \cdot A \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$

Donc $A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}\right) + B = 0$

Par Egalité de deux fonctions polynomiales, l'équation est exacte si $\begin{cases} B = 0 \\ (1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}) = 0 \end{cases}$
d'où $\tau = R \cdot C$

Déterminer la constante A par les conditions initiales :

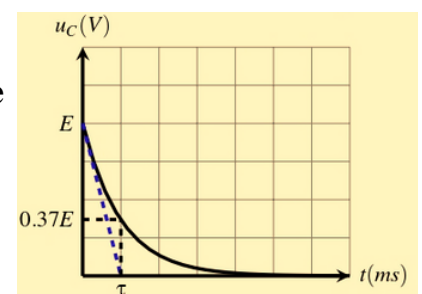
à $t=0$ la tension $U_c(0) = E$, on remplace dans l'équation horaire $U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ et on obtient : $E = A \cdot e^0 + B = A + B$, $E = A + B$ or $B = 0$ alors $A = E$

Donc la solution s'écrit

$$u_c(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$

3 - La représentation de $U_c = f(t)$:

Mathématiquement la courbe qui représente $U_c = f(t)$ est la suivante tel que à $t = 0$ on a $U_c(0) = E$ et quand $t \rightarrow \infty$ on a $U_c = 0$
pratiquement on considère $t > 5\tau$ on a $U_c(\infty) = 0$



4 - Détermination de la constante du temps τ :

✓ Première méthode :

On utilise la solution de l'équation différentielle pour $t = \tau$ $u_C(t=\tau) = E \cdot e^{-1} \approx 0,37 \cdot E$

✓ Deuxième méthode :

☛ Utilisation de la tangente à la courbe à l'instant $t=0$.

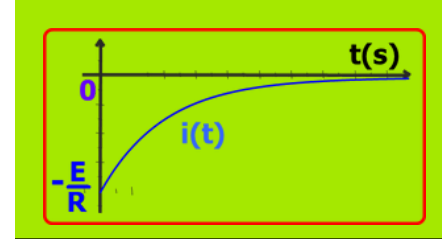
➡ la tangente coupe l'axe des abscisses à $t = \tau$

5 - Expression de l'intensité du courant de charge : $i(t)$:

☛ On a $u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$

➡ et d'après la loi d'additivité des tensions $u_R = -u_C(t)$

alors $u_R(t) = -E e^{-t/\tau}$ d'où $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$



☛ C'est l'intensité du condensateur au cours de la décharge électrique

IV - Énergie électrique stockée dans un condensateur.

Expression de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur

La puissance délivrée par le générateur au condensateur est :

➡ $P = u_C i$ avec $i = C \frac{du_C}{dt}$ alors $P = C u_C \frac{du_C}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} C u_C^2\right)}{dt}$

☛ On sait que la puissance électrique $P = \frac{dE_e}{dt}$ d'où $E_e = \frac{1}{2} C u_C^2$

L'énergie électrique stockée par un condensateur est égal à

$E_e = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$

J → F → C

**PROF
ELZAAR**



prof elzaar

حكمة اليوم

العلم يؤتى إليه ولا يأتي .